**Методы решения особого класса геометрических задач**

Работу выполнили:

Смолина Елизавета 10 «И»

ГБОУ Академическая Гимназия №56

г. Санкт-Петербург

 (812) 346-00-87,  school56.spb@mail.ru

Научный руководитель:

Черкай Михаил Васильевич

Санкт-Петербург,

2021г.

**Оглавление**

1. Введение

2. Постановка задачи

3. Математическая модель

4. Численные эксперименты

5. Выводы

**1.Введение**

В геометрии существует множество задач на нахождение углов, сторон, площадей, объёмов. Одним из более сложных элементов геометрии является локус. Мы решили рассмотреть некоторые задачи на нахождение локуса точки (их можно объединить в особый класс геометрических задач на плоскости). В геометрии локус (от лат. locus - «расположение»; «место») – набор из всех точек, чье местоположение удовлетворяет или определяется одним или несколькими указанными условиями [1], [2]. Например, в генетике локус обозначает местоположение определённого гена на генетической или цитогенетической карте хромосомы [3]. Применение локуса мы можем увидеть в настоящей жизни. К примеру, некоторые командные игры используют тактические установки, которые основываются на расположении игроков при определенных условиях. Нам стало интересно, возможно ли решить эти задачи разными, возможно идентичными способами. Они не рассматриваются в школьной геометрии, зато вы их можете встретить на олимпиадном уровне. Предложенные методы для решения задач, могут помочь при построении математической модели какого-либо процесса. Для работы мы использовали приложение GeoGebra, в котором мы смогли рассмотреть некоторые задачи в динамике***.***

**2. Постановка задачи**

**Цель:** Реализация нескольких методов для решения задач на нахождение геометрического локуса.

**Задачи:**

* Решить некоторое число задач на нахождение локуса
* Рассмотреть 2 подхода
* Указать особенности аналитического подхода
* Продемонстрировать решение задачи данного класса, составленной на базе жизненной ситуации

**3. Математическая модель**

При решении школьных задач обычно применяются 2 подхода:

-геометрический

-аналитический (введение систем координат, векторов)

Здесь, под геометрическим подходом, мы понимаем некоторую цепочку логических рассуждений, которые опираются на теоремы и утверждения планиметрии на уровне 7-9 класса обычной школы.

Мы подобрали задачи, которые наглядно демонстрируют применение того или иного метода.

**4.Численные эксперименты**

Основой нашей работы является рассмотрение ряда задач, для освоения того или иного подхода, вот первая из них:

***Задача 1.***

***Дана прямая с точками В и С. Точка А лежит на окружности с центром в точке О. Точка G – центроид треугольника АВС. Найдите локус G.***

**Решение:**

1) Точка А принадлежит окружности. Определим её через уравнение окружности:

 ($x\_{1}$ -$ x\_{0}$)² + ($y\_{1 }$- $y\_{0}$)²=R²

2) Точка G – центроид, следовательно. делит АМ в отношении 2:1.

Определим вектор МG как: $\overbar{MG}$ = $\frac{1}{3}\overbar{MA}$

3) Если координаты $\overbar{MG}$: $\left\{x\_{2}-\frac{x\_{3}}{2};y\_{2}\right\}$, а координаты $\overbar{MA}$ : $\left\{x\_{1}-\frac{x\_{3}}{2};y\_{1}\right\}$

Составим систему:

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{2}-\frac{x\_{3}}{2}=\frac{1}{3}(x\_{1}-\frac{x\_{3}}{2})\\y\_{2}=\frac{1}{3}y\_{1}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{2}-\frac{x\_{3}}{2}=\frac{1}{3}\left(x\_{1}-\frac{x\_{3}}{2}\right)|×6\\3y\_{2}=y\_{1}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}6x\_{2}-3x\_{3}=2x\_{1}-x\_{3}\\3y\_{2}=y\_{1}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}2x\_{1}=6x\_{2}-2x\_{3}\\3y\_{2}=y\_{1}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}=3x\_{2}-x\_{3}\\y\_{1}=3y\_{2}\end{array}\right.$$

(3$x\_{2 }-x\_{3} - x\_{0}$)² + (3$y\_{2} $- $y\_{0}$)² = R²

**(**$x\_{2 }-\frac{x\_{3} - x\_{0}}{3}$**)² + (**$y\_{2}-\frac{y\_{0}}{3}$**)² =**$(\frac{R}{3})^{2}$

В итоге получаем уравнение окружности с радиусом $\frac{R}{3}$

**Таким образом локус точки G – окружность с радиусом** $\frac{R}{3}$

***Задача 2.***

 ***В треугольнике АВС K, M точки на сторонах AB, BC соответственно. T точка пересечения AM и CK. Вписанные окружности треугольников AKT и CMT пересекаются в точках T и R так, что R = T. P – вторая точка пересечения CR с вписанной окружностью треугольника AKT. Определите локус P.*** ***[4]***

**Решение:**

1) При перемещении точек К и М по прямым АВ и ВС можно

 заметить, что точка Р перемещается по прямой АР.

2) Чтобы определить локус Р определим локус АР.

Докажем, что АР параллельна ВС.

3) 1) ^АТR=^MCR
(^ATR+^MTR=180⁰(смежные);
^MCR+^MTR=180⁰ (четырехугольник вписанный в окружность)
2)^ATR=^MCR => ^APR+^MCR=180⁰=> PA||MC(BC) (сумма соответственных)

Таким образом, АР||АС, локус Р – прямая АС.

***Задача 3.***

***Есть некоторый процесс, который может повторяться большое количество раз, а именно, в начальный момент времени 3 человека образуют правильный треугольник, далее происходят следующие действия в один момент времени: передача мяча в середину противоположной стороны; последующая передача соседу справа от начального положения. Далее перемещение всех объектов по часовой стрелке на очень маленькую длину дуги. Какой локус будет описывать точка положения мяча при его приёме вторым объектом?***

**Решение:**

***Аналитический способ:***

1) Е:(x;y)

x= $\frac{x\_{1}+x\_{2}}{2}$ y= $\frac{y\_{1}-y\_{2}}{2}$

2) $x\_{1}^{2}+y\_{1}^{2}=R^{2}$

$$ x\_{2}^{2}+y\_{2}^{2}= R^{2}$$

$3) x\_{1}$= 2x-$x\_{2}$

 $y\_{1}$=2y-$y\_{2}$

$$\left(2x-x\_{2}\right)^{2}+\left(2y-y\_{2}\right)^{2 }= R^{2}$$

$$4)\left(x-\frac{1}{2}x\_{2}\right)^{2}+ \left(y-\frac{1}{2}y\_{2}\right)^{2}=\left(\frac{R}{2}\right)^{2}$$

Окружность с центром в точке $\left(\frac{1}{2}x\_{2};\frac{1}{2}y\_{2}\right)$ и радиусом $\frac{R}{2}$

***Геометрический способ:***

1) Треугольники АВС и $А\_{1}В\_{1}С\_{1}$ равны, так как эти равносторонние треугольники вписаны в одну окружность.

2) ОЕ=$ОЕ\_{1}$, так как равны треугольники ВОЕ и $В\_{1}ОЕ\_{1}$(ОВ=О$В\_{1}$ (радиусы); ВЕ=$В\_{1}Е\_{1}$(половины соответственных отрезков, так как АЕ и $А\_{1}Е\_{1}$ – медианы соответственно.

3)Все отрезки О$Е\_{\left(z\right)}$, где z:$\left[1;\left.+\infty \right)\right.$; $Е\_{\left(z\right)}$ принадлежит равностороннему треугольнику, при перемещении точек А, В, С на $α градусов.$ Следовательно О$Е\_{\left(z\right)}$ - радиус окружности, описываемой точкой Е.

4) О$Е\_{\left(z\right)}$ = $\frac{1}{2}$R

ВО проходит через точку О (центр окружности, в которую вписан равносторонний треугольник АВС) => ВО делит угол В пополам.

Угол В равен 60 градусов (АВС – равносторонний), следовательно, угол ОВЕ=30 градусам.

АЕ – медиана, биссектриса и высота (АВС – равносторонний), следовательно, треугольник ОВЕ прямоугольный.

Угол ОВЕ=30 градусам в прямоугольном треугольнике, поэтому ОЕ – половина ОВ(R).

**5. Выводы**

1.Оба рассмотренных метода хорошо работают при решении той или иной задачи данного класса. Эти методы объединяют и содержат в себе знания двух наук - алгебры и геометрии, нужные для последующего решения задач на локус.

2. Можно отметить, что аналитический подход требует меньшую подготовленность ученика в геометрии. При решении задач этим подходом, геометрические теоремы, признаки или свойства не задействованы.

3. Некоторые жизненные задачи возможно представить в виде математической модели с помощью разных способов (графов, таблиц). Данный класс задач иллюстрирует, как можно применить геометрический подход для построения математической модели некоторой реальной задачи.

**Список используемой литературы:**

[1] James, Robert Clarke; James, Glenn (1992), Mathematics Dictionary, Springer, p. 255

[2] Whitehead, Alfred North (1911), An Introduction to Mathematics, H. Holt, p. 121

[3] Биологический энциклопедический словарь / Гл. ред. М.С. Гиляров. – М.: Сов. энциклопедия, 1986. – 831 с.

[4] Cherkai, Konstantin (2020), Pencil Notebook, p.6